**Самостоятельная работа 5. Булева алгебра**

**Цель:** Изучить вопросы связанные с применением аппарата математической логики в компьютерах, освоить приемы преобразования формул алгебры множеств логическими средствами.

**Методические указания к выполнению работы.**

Все задания снабжены теоретическими сведениями и примерами решения задач.Этого достаточно для успешного выполнения заданий. Дополнительные сведения можно получить из источников, указанных в списке литературы. Внимательно ознакомьтесь с теорией.

Всего в работе 9 задач. Задания выполняется в тетради, на титульном листе указываете ФИО студента, группу, вариант и текст задачи. Вариант выбирается по вашему номеру в списке группы по приведенной ниже таблице.

**Критерии оценивания.** За каждую верно решенную задачу вы получаете 1 балл (максимум в сумме 9 баллов)

Задание должно быть сдано в указанные сроки. При задержке сдачи работы более 2 недель полученная оценка автоматически снижается на 2% за каждую неделю задержки.

При правильных и полных ответах на контрольные вопросы преподавтель может дополнительно начислить до 2 баллов бонусов.

Варианты задач

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Задача | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 1 | 6 | 12 | 16 | 9 | 5 | 3 | 20 | 1 |
| 2 | 2 | 7 | 13 | 17 | 10 | 6 | 4 | 21 | 2 |
| 3 | 3 | 8 | 14 | 18 | 12 | 7 | 5 | 22 | 3 |
| 4 | 4 | 9 | 15 | 19 | 13 | 8 | 6 | 23 | 4 |
| 5 | 5 | 10 | 16 | 20 | 14 | 9 | 7 | 1 | 5 |
| 6 | 6 | 12 | 17 | 12 | 15 | 10 | 8 | 2 | 6 |
| 7 | 7 | 13 | 18 | 1 | 16 | 12 | 9 | 3 | 7 |
| 8 | 8 | 14 | 19 | 2 | 17 | 13 | 10 | 4 | 8 |
| 9 | 9 | 15 | 20 | 3 | 18 | 14 | 13 | 5 | 9 |
| 10 | 10 | 16 | 13 | 4 | 19 | 15 | 14 | 6 | 10 |
| 11 | 11 | 17 | 1 | 5 | 20 | 16 | 15 | 7 | 11 |
| 12 | 12 | 18 | 2 | 6 | 4 | 17 | 16 | 8 | 12 |
| 13 | 13 | 19 | 3 | 7 | 1 | 18 | 17 | 9 | 13 |
| 14 | 14 | 20 | 4 | 8 | 2 | 19 | 18 | 10 | 14 |
| 15 | 15 | 16 | 5 | 9 | 3 | 20 | 19 | 11 | 15 |
| 16 | 16 | 1 | 6 | 10 | 4 | 17 | 20 | 12 | 16 |
| 17 | 17 | 2 | 7 | 12 | 5 | 1 | 9 | 13 | 17 |
| 18 | 18 | 3 | 8 | 13 | 6 | 2 | 3 | 14 | 18 |
| 19 | 19 | 4 | 9 | 14 | 7 | 3 | 4 | 15 | 19 |
| 20 | 20 | 5 | 10 | 15 | 8 | 4 | 5 | 16 | 20 |
| 21 | 21 | 6 | 12 | 16 | 9 | 5 | 6 | 17 | 21 |
| 22 | 22 | 7 | 13 | 17 | 10 | 6 | 7 | 18 | 22 |
| 23 | 23 | 8 | 14 | 16 | 12 | 7 | 8 | 19 | 23 |
| 24 | 24 | 9 | 15 | 18 | 13 | 8 | 9 | 20 | 24 |
| 25 | 25 | 10 | 16 | 19 | 14 | 9 | 10 | 21 | 10 |
| 26 | 26 | 12 | 6 | 20 | 15 | 10 | 13 | 22 | 16 |
| 27 | 27 | 13 | 7 | 7 | 16 | 12 | 14 | 23 | 21 |
| 28 | 28 | 15 | 8 | 1 | 17 | 13 | 15 | 1 | 5 |
| 29 | 18 | 17 | 9 | 2 | 18 | 14 | 16 | 2 | 12 |
| 30 | 7 | 20 | 10 | 3 | 19 | 15 | 17 | 3 | 20 |

Содержание

[Понятие булевой функции, свойства булевых функций 3](#_Toc142814834)

[Полиномы Жегалкина и линейные булевы функции 5](#_Toc142814835)

[Двойственность и самодвойственные булевы функции 8](#_Toc142814836)

[Монотонные булевы функции 12](#_Toc142814837)

[Булевы функции, сохраняющие нуль и сохраняющие единицу 15](#_Toc142814838)

[Полные системы и функционально замкнутые классы булевых функций 17](#_Toc142814839)

[Базисы булевых функций 19](#_Toc142814840)

[Минимизация БФ методом карт Карно 21](#_Toc142814841)

[Минимизация БФ методом Квайна 21](#_Toc142814842)

Задачи

[Задача 1. Булевы функции (10 баллов) 3](#_Toc142814546)

[Задача 2. Полиномы Жегалкина (10 баллов) 5](#_Toc142814547)

[Задача 3. Линейные функции (10 баллов) 6](#_Toc142814548)

[Задача 4. Двойственные функции (10 баллов) 9](#_Toc142814549)

[Задача 5. Самодвойственные функции (12 баллов) 10](#_Toc142814550)

[Задача 6. Монотонные функции (12 баллов) 13](#_Toc142814551)

[Задача 7. Полные системы булевых функций, теорема Поста (12 баллов) 17](#_Toc142814552)

[Задача 8. Базисы булевых функций (12 баллов) 19](#_Toc142814553)

[Задача 9. Минимизация булевых функций и синтез переключательных схем 20](#_Toc142814554)

Понятие булевой функции, свойства булевых функций

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  |  | | 0 1 | 1 0 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Функции от двух аргументов называются соответственно: *x*∧*y- конъюнкция, x*∨*y - дизъюнкция, x*→*y - импликация, x*↔*y - эквивалентность, x|y- штрих Шеффера, x*↓*y- стрелка Пирса,x*⊕*y - сложение по модулю два (сумма Жегалкина).*

1. Булевы функции

Выразите следующие булевы функции через отрицание (¬) и дизъюнкцию (∨):

1. x⊕y
2. x|y
3. x↓y
4. ¬(x→y)

Выразите через суперпозиции конъюнкции(∧) и отрицания (¬) следующие булевы функции:

1. x→y
2. x⊕y
3. x↓y
4. ¬(x→y)

Выразите булевы функции через сложение по модулю 2 (сумму Жегалкина⊕), конъюнкцию (∧) и константу 1:

1. x∨y
2. x→y
3. x↓y
4. ¬(x→y)

Выразите булевы функции через штрих Шеффера (|)

1. x∧y
2. x∨y
3. x→y
4. x↓y
5. ¬(x→y)

Выразите через суперпозицию функций стрелка Пирса (↓) следующие булевы функции:

1. ¬x
2. x∧y
3. x∨y
4. x→y
5. x|y

Выразите через отрицание (¬) и импликацию (→)

1. x∨y
2. x↔y
3. x ⊕y
4. x↓y

**Примеры**

1) x∨y = (x∨y)(y∨) = (x ∨∨y = ∨y = () ∨y

2) (x↔y)↔z = (x⊕y⊕1) ⊕z ⊕1 = x⊕y⊕z⊕0 = x⊕y⊕z

3) x ⊕y = = =(x→y) | (y→x) = (x | (y | y)) | (y | (x | x))

4) x↔y = (x→y)(y→x)= = = = () (x ) = ((x x) y)(x(yy))

5) x|y = = ∨ = x→

Полиномы Жегалкина и линейные булевы функции**.**

Полиномом Жегалкина от переменных называется булева функция вида:

,

представляющая собой сумму по модулю два (сумму Жегалкина) конъюнктивных одночленов от всевозможных наборов переменных , причем коэффициент может равняться 1 или 0, что показывает, входит данный конъюнктивный одночлен в сумму или нет.

Булева функция называется линейной,если в представляющем ее полиноме Жегалкина отсутствуют слагаемые, имеющие степень выше первой, т.е. представляющий эту функцию полином имеет вид , причем постоянные коэффициенты могут образовывать любой набор из 0 и 1.

1. Полиномы Жегалкина

Для следующих Булевых функций найдите представляющий их полином Жегалкина

1. (y∨z)
2. (x→(y→))(y→x)
3. (x⊕1)(y⊕1)∨yz
4. ∨(y∨x)z
5. z∨x
6. (∨y∨z)(x∨y∨)( ∨∨z)
7. x(y→z)∨(y∨x)(z⊕1)
8. ∨y∨
9. ∨y∨yz∨xz∨xy
10. xz∨(x⊕z)y∨

Выясните, верны ли следующие равенства, отыскав полиномы Жегалкина, представляющие булевы функции в обеих частях этого равенства

1. x→ (y→z) = (x→y) →(x→z)
2. (xy→z) →(x→z) = ∨y∨z
3. xy→z = (x→z)(y→z)
4. (x↔y)(x∨y)=xy
5. ()=x↔y
6. z→(x∨y) =(z→x) →(x→y)
7. x↔y = (xz ↔yz)((x∨z)↔(y∨z))
8. xy ∨ (z→x) = →
9. (x→y) →z = x→(y→z)
10. ((x→z)(y→z)) = ((x∨y) →z)

**Примеры**

1)∨(z∨x)y∨x

Для нахождения полинома Жегалкина нужно выразить все встречающиеся в данном выражении булевы функции через сумму Жегалкина (сложение по модулю 2) и конъюнкцию, а затем, пользуясь свойствами функций, максимально упростить полученное выражение. Проделаем это для данной булевой функции:

∨ (z ∨ x)y ∨ x = (∨ x)∨ (z ⊕ x)y = (⊕ x)∨ (yz ⊕ xy) = (⊕ xz ) ∨ (yz ⊕ xy) = (⊕ x)(yz ⊕ xy) ⊕⊕ x⊕yz ⊕ xy = ⊕ x⊕yz ⊕ xy = (x⊕ 1)(z⊕ 1) ⊕ x(y ⊕ 1)(z ⊕ 1) ⊕ (x ⊕ 1 )yz ⊕ xy(z ⊕ 1) = xz ⊕ x ⊕ z ⊕ 1 ⊕ xyz ⊕ xy ⊕ xz ⊕ x ⊕ xyz ⊕ yz ⊕ xyz ⊕ xy = xyz ⊕ yz ⊕ z⊕ 1.

2) x↔y = xy∨

Для функции в левой части равенства имеем: х↔у = = х ⊕ у⊕ 1 . Для функции в правой части равенства находим: xy∨ =ху⊕ху ⊕ = 0 ⊕ ху⊕(х ⊕ l)(y⊕ 1 ) = ху ⊕ху ⊕ х ⊕ у ⊕ 1 = х ⊕ у ⊕ 1. Следовательно, рассматриваемое равенство действительно выполняется.

1. Линейные функции

Выясните, какие из следующих функций линейны:

1. z∨x∨yz∨xyz;
2. ((х ∨ у ∨z) →xy) ∨ (х ⊕y)z;
3. (y∨x)∨ (x⊕y)z;
4. (x⊕y)z∨ (∨xy)z;
5. yz∨(x ⊕ z⊕ 1 )∨xy;
6. ((x∨y∨) → x) ∨ (z∨x)y;
7. y∨yz ∨ xy∨xyz;
8. (z ∨ y) ∨ (y ⊕ z)x;
9. (x∨∨z)(x∨∨)(∨∨z)(∨∨);
10. xy∨ ((∨ у ∨z) →xyz) ∨z;
11. ∨z∨yz∨xy;
12. ∨y∨xy∨ xyz;
13. (x∨у ∨)(x∨∨)(∨y∨)(∨∨z);
14. ∨(∨)(x∨ y)z;
15. (y⊕z) ∨ ((x∨ у ∨z)→yz);
16. →(y∨);
17. xyz∨ xz∨ xy,
18. (z∨y) ∨ (y⊕z⊕l)x;
19. (y⊕x) →;

**Примеры**

1) xyz ∨ xz ∨y∨

Для доказательства нужно найти полином Жегалкина данной функции и убедиться в том, что степень этого полинома не выше первой. Полином отыскивается следующим образом. Нужно выразить все встречающиеся в данном выражении булевы функции через сумму Жегалкина и конъюнкцию (для этого достаточно помнить формулы=*x*⊕1, 1⊕1=0, x⊕x=0 и законы де Моргана = ), а затем, пользуясь свойствами этих функций, максимально упростить полученное выражение:

xyz∨xzvy∨ = xz(y∨) ∨v (y∨) =xz∨ = = = = = (xz⊕1)(xz⊕x⊕z)⊕1=xz⊕xz⊕xz⊕xz⊕x⊕z⊕1= х ⊕z⊕ 1.

Полученный полином Жегалкина есть полином первой степени, и, следовательно, данная булева функция линейна.

2) ((x∨ у ∨z) →xz) ∨ (z∨ х)y∨x.

Представим данную функцию полиномом Жегалкина. Для этого используем свойства булевых функций и выразим все встречающиеся в данном выражении функции через сумму Жегалкина и конъюнкцию, а затем упростим полученное выражение:

((х ∨ у ∨z) →xz) ∨ (z∨x)y∨x = (∨xz) ∨ ((x⊕l)z∨x(z⊕l))y∨xy = ∨xz∨x∨ ((xz⊕z) ∨ (xz⊕x))y= (∨x)∨xz∨ ((xz⊕z)(xz⊕x) ⊕ (xz⊕z) ⊕ (xz⊕x))y = ∨xz∨ (xz⊕xz⊕xz⊕xz⊕z⊕x))y = (∨xz) ∨ (x⊕z)y = ((∨x) (∨z)) ∨ (xy + yz) + (x∨)∨(xy⊕yz) = (x⊕x⊕)∨ (xy⊕yz) = {x⊕x⊕) ∨(xy⊕yz) = (xyz⊕xy⊕xz⊕x⊕xy⊕x⊕yz⊕y⊕z⊕ 1) ∨ (xy⊕yz) = (xyz⊕xz⊕yz⊕y⊕z⊕ 1) ∨ (xy⊕yz) = xyz⊕xz⊕yz⊕y⊕z⊕ 1 ⊕xy⊕yz = xyz⊕xyz⊕xyz⊕xy⊕xyz⊕xy⊕xyz⊕xy⊕yz⊕yz⊕yz⊕yz⊕xyz⊕xz⊕y⊕z⊕ 1 ⊕xy = xyz⊕xy⊕xz⊕y⊕z⊕l.

Поскольку полученный полином Жегалкина кроме слагаемых первой и нулевой степени у, z содержит слагаемые второй степени *ху* и *xz*, а также третьей степени *xyz*, то данная булева функция не является линейной.

Двойственность и самодвойственные булевы функции

Булева функция называется *двойственной* по отношению к булевой функции , если .

Булева функция называется *самодвойственной,* если двойственная к ней функция совпадает с ней самой, т.е. = . Учитывая определение двойственной функции последнее равенство для самодвойственной функции можно представить в виде:

=

Чтобы проверить, является ли функция самодвойственной, можно аналитическими вычислениями убедиться, выполняется ли вышеприведенное равенство. Однако, очень просто можно определить самодвойственные функции по таблице истинности. Построим, например , таблицу истинности для функции от трех переменных:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| строка |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Согласно определению, если функция самодвойственна, то *f*(0,0,0)=. Сравним значения функции в строках 0 и 7: для функции видим, что ее значения в строках 0 и 7 совпадают, следовательно условие самодвойственности нарушается и остальные строки можно не сравнивать. Для функции результат сравнения (если значения наборов переменных указаны в естественном порядке арифметического счета, то сравнивать нужно строки, равноудаленые от центральной линии):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| строки 0 и 7: |  |  |
| строки 1 и 6: |  |  |
| строки 2 и 5: |  |  |
| строки 3 и 4: |  |  |

Видно, что для фунции условие самодвойственности нарушается для строк 0 и 7(а также для строк 1 и 6), а для функции условие самодвойственности справедливо для всех строк. Поэтому не самодвойственна, а –самодвойственна.

1. Двойственные функции

Для следующих булевых функций найдите двойственные функции. Представьте найденные функции их СДН-формами:

1. yz∨x∨xyz;
2. yz∨y∨xz∨x;
3. x (y + z) ∨ ((∨ у ∨z) → (yz));
4. ∨x(y+z);
5. xyz + ху + xz + z;
6. y∨;
7. (z →)(x →y);
8. (x→(z→y)) (x→(z→));
9. z∨y∨x∨xz∨xyz;
10. ∨ yz ∨;

Покажите, что для следующих булевых функций двойственные функции совпадают с их отрицанием:

1. x(y ⊕ z ⊕ 1) ⊕ yz;
2. y∨ xz;
3. y∨yz ∨ x∨ xz;
4. (x ⊕ z)(y ⊕ 1) ⊕ xy ⊕ yz;
5. xy ⊕ xz ⊕ yz ⊕ x ⊕ y ⊕ z;
6. xyz ∨;
7. xyz ∨ xz ∨y∨;
8. ((x ∨ y ∨ z) → yz) ∨ xy∨z;
9. (x ⊕ z ⊕ 1)y ⊕ xz ⊕ 1;
10. xy ⊕ xz ⊕ yz ⊕ x ⊕ 1;

**Примеры**

1) ∨(x→z);

Обозначим f(x,y,z) = ∨(x→z). Найдем функцию, двойственную для f(x,y,z):

f\*(x,y,z) = = = = (x→)() = (∨)(z∨) = (z∨) ∨(z∨) = z∨∨z∨ = ∨z∨.Представим f\* в виде СДНФ:f\*= ∨z∨ = (z∨) ∨(y∨)z∨ (x∨) = z∨∨yz∨z∨x∨yz = ∨z∨x∨yz.

2) xy ⊕ xz ⊕ yz ⊕ z.

f(x,y,z) = xy⊕xz⊕yz⊕z. Найдем для функции двойственную функцию:

f\* = = ⊕1 = (x⊕ 1)(y⊕ 1) ⊕ (x⊕ 1)(z⊕1) ⊕ (y⊕ 1)(z⊕ 1) ⊕z⊕ 1 ⊕1 = xy⊕x⊕y⊕ 1 ⊕xz⊕x⊕z⊕ 1 ⊕yz⊕y⊕z⊕1 ⊕z = xy⊕xz⊕yz⊕z⊕ 1 = = Итак, двойственная функция для совпала с отрицанием функции f: f\* =.

1. Самодвойственные функции

Выясните, какие из следующих булевых функций самодвойственны:

1. x(z → y) ∨
2. yz ∨ xz ∨z ∨;
3. xy ∨ xz ∨ yz;
4. y ∨∨ y;
5. xy ⊕ xz ⊕ yz ⊕ y ⊕ z;
6. y∨yz ∨ xy∨ xyz;
7. z ∨y∨ x∨ xyz;
8. xz ⊕ (x ⊕ z)(y ⊕ 1);
9. ((z → z) ∨z → z);
10. (∨ y ∨ z)(∨ y ∨)(∨∨ z)(∨∨);
11. ∨∨;
12. yz ∨ xz ∨ xy;
13. xy ⊕ xz ⊕ yz;
14. (∨ z)∨ (∨ y)∨yz;
15. ((x → y) ⊕ 1)(z ⊕ 1) ∨ xz;
16. xy∨xz∨yz∨xyz;
17. y∨yz∨x∨xy∨xyz;
18. ((x ∨ y ∨ z) →yz) ∨ x(y ⊕ z ⊕ 1);
19. xyz ∨y∨ x∨;
20. xy∨ x∨y∨;

**Примеры**

1) f(x,y,z) = x∨x∨. Для доказательства самодвойственности функции f(x,y,z) найдем ее двойственную: f\*(x,y,z) = = = (x∨)(x∨)(∨) – (x∨)(∨) = x∨x∨∨ = x∨x∨ = f(x,y,z), что и требовалось доказать.

2) f(x,y,z) = (x⊕ 1)∨ (x⊕y)z. Найдем сначала СДН-форму для данной функции: f(x,y,z) = (x⊕ 1)∨ (x⊕y)z = x(y∨z) ∨ (x↔y)z = xyz∨ ((x∨y)(x∨y))z = xyz∨ (xy∨xy)z = =xyz∨xyz∨xyz. Затем найдем функцию, двойственную f, и также представим ее в виде СДН-формы: f\* = = (∨y∨)(x∨∨z)(∨y∨z) = (∨y)(x∨∨z) = ∨z∨xy∨yz = ∨z∨z∨yz∨xy∨xyz∨xyz∨yz = ∨z∨yz∨xy∨xyz. Поскольку функции f и f\* имеют различные СДН-формы, то и сами эти функции различны: f\*≠f. Следовательно, функция f несамодвойственна.

Монотонные булевы функции

Упорядочим множество {0,1}, полагая Поскольку нам придется иметь дело с функциями от нескольких переменных, введем отношение частичного порядка в множестве двоичных наборов одной и той же длины.

Пусть - двоичные наборы. Тогда меньше (обозначение ), если для всех , причем по крайней мере для одного имеет место строгое неравенство. Будем писать , если или наборы совпадают. Данное отношение есть отношение частичного порядка, так как определено е для всех возможных наборов переменных.

Булева функция называется монотонной, если для всяких наборов , таких, что , имеем .

**Алгоритм распознавания монотонной булевой функции** (основан на утверждении об условии немонотонности).

*Начало*. Задана таблица истинности булевой функции.

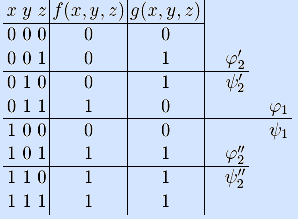
*Шаг 1*. Сравниваем значения функции на наборах, соседних по первой переменной, то есть верхнюю половину столбца значений функции (вектор φ1) с нижней половиной (вектор ψ1). Если условие φ1http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.gif ψ1 нарушено, то функция не монотонна, идем на конец.

*Шаг 2*. Сравниваем значения функции на наборах, соседних по второй переменной, то есть верхние четвертины столбца значений функции (векторы φ'2, ψ'2) с нижними четвертинами (векторами φ''2, ψ''2) в каждой половине. Если хотя бы одно из условий φ'2http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.gif ψ'2 и φ''2http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.gif ψ''2нарушено, то функция не монотонна, идем на конец.

*Шаги 3 –n*. Аналогично сравниваем восьмые, шестнадцатые части, и так далее. Если ни одно из проверяемых условий не нарушено, то функция монотонна.

*Конец*.

**Примеры.** Рассмотрим две булевых функции



Проверим на монотонность функциюf(x,y,z). Сравниваем половины столбца значений: f(0,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,0,0)=0; f(0,0,1)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,0,1)=1; f(0,1,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,1,0)=1; f(0,1,1)=1 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,1,1)=1. Сравниваем четвертины: f(0,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(0,1,0)=0; f(0,0,1)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(0,1,1)=1; f(1,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,1,0)=1; f(1,0,1)=1http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,1,1)=1. Сравниваем осьмушки: f(0,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(0,0,1)=0; f(0,1,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(0,1,1)=1;f(1,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,0,1)=1; f(1,1,0)=1http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,1,1)=1.Для всех пар условия монотонности выполняются. Следовательно, функция f(x,y,z) монотонна.

Проверим на монотонность функцию g(x,y,z). Сравниваем g(0,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.gifg(1,0,0)=0; g(0,0,1)=1http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.gifg(1,0,1)=1; g(0,1,0)=1http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.gifg(1,1,0)=1; g(0,1,1)=0http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,1,1)=1. Сравниваем четвертины: g(0,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.gifg(0,1,0)=1; g(0,0,1)=1f(0,1,1)=0 – условие монотонности нарушено. Следовательно, функция g(x,y,z) немонотонна.

1. Монотонные функции

Определите, какие из следующих булевых функций монотонны:

1. xyz∨yz∨xy;
2. xyz⊕xy⊕xz;
3. xy ∨ xz ∨ yz;
4. (x ∨ y ∨ z)(x ∨∨ z)(x ∨ y ∨);
5. xyz ⊕ x ⊕ yz;
6. xyz ∨ (xyz ⊕ xy);
7. (x ∨ y ∨ z)(∨ y ∨ z) (x ∨∨ z)(x ∨ y ∨)(∨∨ z)(x ∨∨);
8. z ∨ x∨yz ∨ xyz;
9. xyz ∨ xz ∨ yz;
10. xy ⊕ (x ⊕ y);
11. xyz;
12. (x ⊕ y )z ⊕ ();
13. (x ∨ y ∨ z)(∨ y ∨ z)(x ∨ y ∨);
14. xyz ⊕ xz;
15. ∨y∨ z∨ xy∨ xyz;
16. xy(z ⊕ 1) ⊕ z;
17. y∨ xz ∨ (⊕⊕ y);
18. (y ⊕ z) ∨ ((∨ y ∨ z) → xyz) ∨ x((y → z) ⊕ 1);
19. (x ∨ y ∨ z)(∨ y ∨ z)(x ∨∨)(∨∨ z);
20. xyz ⊕ xy ⊕ xz ⊕ yz ⊕ x ⊕ y ⊕ z;

**Примеры**

1) (x∨y∨z)(∨y∨z) (x∨∨z)

Составим таблицу значений данной функции:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *строка* | *x* | *y* | *z* | *f(x,y,z)* |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Проверим на монотонность функциюf(x,y,z). Сравниваем половины столбца значений: f(0,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,0,0)=0; f(0,0,1)=1http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,0,1)=1; f(0,1,0)=1http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,1,0)=1; f(0,1,1)=1 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,1,1)=1. Сравниваем четвертины: f(0,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(0,1,0)=0; f(0,0,1)=1http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(0,1,1)=1; f(1,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,1,0)=1; f(1,0,1)=1http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,1,1)=1. Сравниваем осьмушки: f(0,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(0,0,1)=1; f(0,1,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(0,1,1)=1;f(1,0,0)=0 http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,0,1)=1; f(1,1,0)=1http://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/img/img1.giff(1,1,1)=1. Условия монотонности выполнены для всех сравниваемых пар. Следовательно, функция монотонна.

2) (x∨)(∨y)z∨yz∨x;

Составим таблицу истинности значений данной функции:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *строка* | *x* | *y* | *z* | *f(x,y,z)* |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Нам нужно сравнить значения функции на наборах переменных, отличающихся одной 1. Сначала разделим таблицу пополам и сравним строки из половинок:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| строки 0,4: | *f(0,0,0)=0 ≤ f(1,0,0)=1* |  |
| строки 1,5: | *f(0,0,1)=1≥ f(1,0,1)=0* | монотонность нарушена |

Булевы функции, сохраняющие нуль и сохраняющие единицу

Булева функция называется сохраняющей нуль, если . Булева функция называется сохраняющей единицу, если .

Полные системы и функционально замкнутые классы булевых функций

Полные и неполные системы булевых функций. Система (совокупность) булевых функцийназывается *полной*, если всякая булева функция является суперпозицией функций из этой системы.

Обозначим:

– класс всех булевых функций, сохраняющих ноль.

– класс всех булевых функций, сохраняющих единицу.

– класс всех самодвойственных булевых функций.

– класс всех монотонных функций.

– класс всех линейных булевых функций.

Применение теоремы Поста. Напомним теорему Поста, которая формулирует критерий полноты системы булевых функций: для полноты системы булевых функций необходимо и достаточно, чтобы система не включалась ни в один из этих классов. Отсюда легко получается отрицание этого критерия, представляющее собой критерий неполноты системы булевых функций: система булевых функций неполна тогда и только тогда, когда она целиком включается в один из классов .

1. Полные системы булевых функций, теорема Поста

Решите указанные ниже задачи двумя способами:

а) логическими рассуждениями;

б) используя теорему Поста

Докажите полноту следующих систем булевых функций:

1. {∧, ¬}
2. {∨, ¬}
3. {→, ¬}
4. {, ¬}, где x  y = (
5. {, 1}
6. {, 0}
7. {|}
8. {↓}
9. {⊕, ∧, 1}
10. {⊕, ∨, 1}

Докажите неполноту следующих систем булевых функций:

1. {∧, ∨}
2. {∧, →}
3. {∨, →}
4. {⊕, ¬}
5. {¬, 1}
6. {∨, ⊕}
7. {⊕, ↔}
8. {∧, ∨, →}
9. {∧, ∨, →, ↔}
10. {¬}

**Примеры**

Для доказательства достаточно выразить каждую функцию из какой-нибудь полной системы функций через функции данной системы. В лекциях методом математической индукции доказывается полнота системы {∧, ∨, ¬}.

1) {↔, ∧, 0}

а) Можно также показать (п.1 данной задачи), что полной является система {∧, ¬}. Нам достаточно выразить функции полной системы {∧, ¬} через функции {↔, ∧, 0}. Функция ∧ принадлежит обеим системам, а для функции ¬ справедливо выражение: = *x↔* 0; Следовательно система функций {↔, ∧, 0} – полная.

б) Составим таблицу Поста данной системы функций:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | P0 | P1 | S | L | M |
| ↔ | - | + | - | + | - |
| ∧ | + | + | - | - | - |
| 0 | + | - | - | + | + |

Стоящий в таблице знак “+” означает, что указанная в данной строке функция принадлежит указанному в данном столбце классу. Знак “-“ означает непринадлежность данной функции соответствующему классу. Если в каждом из пяти столбцов классов P0, P1, S, L, M имеется хотя бы один “-“, то рассматриваемая система функций полна, в противном случае система не полна. Наша система – полна.

2) {↔, ¬}

а) Для доказательства неполноты системы нужно найти какое-либо свойство, которым обладают все функции данной системы и которое сохраняется при суперпозиции, хотя не все булевы функции им обладают. Например, в задаче 11 каждая из функций ∧ и ∨ сохраняет 0. Следовательно, всякая суперпозиция этих функций будет функцией, сохраняющей 0. Очевидно, что далеко не все булевы функции сохраняют 0, поэтому не все булевы функции выразимы через {∧, ∨}.

В задаче 2 нетрудно показать, что в виде суперпозиций функций ↔ и ¬ могут быть представлены лишь такие функции, среди значений которых имеется одинаковое число 0 и 1. Это выполняется не для всех булевых функций, следовательно, система {↔, ¬} неполна.

Базисы булевых функций

Минимальная полная система функций (т.е. такая полная система функций, удаление из которой любой функции делает систему неполной) называется *базисом*.

1. Базисы булевых функций

Докажите, что следующие системы булевых функций являются базисами:

1. {*x* ⊕ *y* ⊕ *z, xy,* 0 ,1};
2. {*x* ⊕ *y* ⊕ *z, x ∨ y*, 0,1};
3. {*x* ⊕ *y* ⊕ *z, xy* ⊕ *xz* ⊕ *yz*, 0, 1};
4. {*xyz, x ↔ y*, 0};
5. {*xy ∨z*, 0, 1}
6. {*xy ∨ xz ∨ yz,* , 1}
7. (*y → x*)(*→ z*), 0, 1};
8. {*xy ∨ z, x ↔ y*, 0};
9. {*xy∨xz∨yz, x↔y, x*⊕*y*};
10. {(*x* ⊕ *y*) *↔z, xy* ⊕ *z, x* ⊕ *y*};
11. {*x ∨ yz, x* ⊕ *y*, 1};
12. {(*x ↔ y*) ⊕*z, xy*⊕ *z*, 0}

Из полной системы булевых функций выделите всевозможные базисы:

1. {(*x∨y*)(*∨*), *xy*⊕*z*, (*x*⊕*y*) ↔*z*, *xy∨xz∨yz*};
2. {*x*⊕*y*⊕*z*, 1, *xy*, };
3. {*xyz*, *x*⊕*y*⊕*z*, 1, *x*};
4. {(*x*⊕*y*)*z*, 1, *xy∨z*, *x*⊕*y*⊕*z*};
5. {*∨∨*, *x*⊕*y*, *xy*, 1};
6. {(*x→y*) *→z*, , *xyz*, *x*⊕*y*⊕*z*};
7. {*x→* (*y → z*), *x* ⊕ *y*, 0, *xy* ⊕ *z*};
8. {*x ∨ yz*, *x* ⊕ *y*, 1, };
9. {*xy ∨ z*, *x* ↔ *y*, 0, 1};
10. {*xy ∨z*, *0, 1, (y → x)(→ z)*}.
11. {*z ∨ x*, *x* ⊕ *y*, *x* ↔ *y*, 1}.

*Указание:* Сначала нужно составить таблицу Поста для данной системы и выяснить, является ли она полной. Затем поверить, является ли сама система базисом. Если эта система не является базисом, то из нее выделяются всевозможные полные системы, состоящие из двух и трех функций. И, наконец, нужно проверить, будут ли полные системы из двух и трех функций базисами.

1. Минимизация булевых функций и синтез переключательных схем
2. Запишите СДНФ функции
3. Минимизируйте функцию методом карт Карно и методом Квайна.
4. Сравните полученные минимальные ДНФ
5. Для минимальной ДНФ нарисуйте релейно-контактную (переключательную) схему

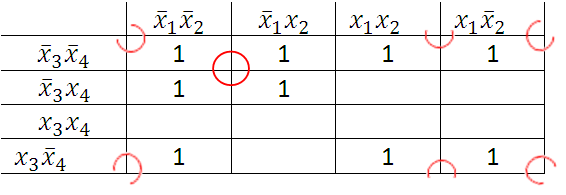
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | X4 | Вариант | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |  | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 |  |  |  |  | 1 | 1 |  |  | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |  |  |  |  | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  | 1 |  | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 |  |  |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  | 1 | 1 |  |  |  | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |  | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 |  | 1 |  |
| 1 | 0 | 0 | 0 |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 |  |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 |  |  | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |  |  |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 |  |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |  | 1 |  |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 |  |  | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  | 1 |  |

**Пример**(вариант 25)

1. Запишем СДНФ = ∧∨∨∨∨∨∨∨∨

Минимизация БФ методом карт Карно

Представим таблицу истинности булевой функции в виде карты Карно и произведем склеивание



Минимальная ДНФ:

Минимизация БФ методом Квайна

1 этап. Нахождение первичных импликант.

Все конъюнкции СДНФ данной функции сравнивают между собой по­парно, применяя закон склеивания . Удобно члены функции занумеровать, поместить в таблицу. Сравниваем последовательно 1-й член со всеми остальными. Результаты склеивания записываем во 2-й столбец, указывая в скобках номера склеенных членов, а склеенные члены 1-го столбца от­мечаем звездочкой (\*).Ранг полученных конъюнкций на единицу ниже, т.е. они содержат на одну переменную меньше. Эти конъюнкции нумеруются, затем операцию повторяем, записывая результат в 3-й столбец и т.д., пока вновь полученные конъюнкции уже не склеиваются между собой. Все неотмеченные знаком \* конъюнкции называются первичными (простыми) импликантами. Все члены, отмеченные знаком \*, будут поглощены простыми импли­кантами на основании операции поглощения . Для удобства простые импликанты в таблице обведем рамочкой, зачеркнув повторяющиеся импликанты.

Дизъюнкция всех простых импликант дает сокращенную ДНФ данной функции: = ()∨() ∨ () ∨ ()

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Конъюнктивные  члены | | Результаты  1-го склеивания | | | Результаты  2-го склеивания | |
| 1 |  | \* |  | (1-2) | \* |  | (1-7) |
| 2 |  | \* |  | (1-3) | \* |  | (2-8) |
| 3 |  | \* |  | (1-4) | \* |  | (3-5) |
| 4 |  | \* |  | (1-6) | \* |  | (3-9) |
| 5 |  | \* |  | (2-5) | \* |  | (4-6) |
| 6 |  | \* |  | (3-7) | \* |  | (8-11) |
| 7 |  | \* |  | (4-5) | \* |  | (9-10) |
| 8 |  | \* |  | (6-7) | \* |  |  |
| 9 |  | \* |  | (6-8) | \* |  |  |
| 10 |  |  |  | (7-9) | \* |  |  |
| 11 |  |  |  | (8-9) | \* |  |  |

2 Этап. Расстановка меток.

Составляется таблица, число строк которой равно числу найденных простых импликант, а число столбцов – числу членов СДНФ данной функции. В 1-й столбец записываются первичные импликанты, в 1-ю строку члены функции. Если в член функции входит первичная импликанта, то на пересечении их ставится метка .

Число меток в строке зависит от числа исключенных букв в импли­канте. Для  исключенных букв число меток будет  (используйте для проверки правильности построения первичных импликант).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) |
|  | V | V |  | V | V |  |  |  |  |
|  | V |  | V |  |  | V | V |  |  |
|  | V |  |  | V |  | V |  | V |  |
|  |  |  |  |  |  | V | V | V | V |

3 этап. Нахождение существенных импликант.

Если в каком-либо столбце составленной таблицы меток имеется только одна метка, то первичная импликанта, стоящая в соответствующей строке, является существенной. Она не может быть исключена из минимальной формы функции, т.к. без нее не может быть получено покрытие всего множества импликант данной функции. Из таблицы меток исключаются строки и столбцы, на пересечении которых стоит эта единственная метка.

В нашем случае таких импликант 3 – в столбцах (2), (3), (5) повторяется (2), (9). Существенные импликанты: , ,

Вычеркиваем столбцы, в которые входят существенные импликанты: для - столбцы (1), (2), (4). (5); для - столбцы (1), (3), (6), (7); для - столбцы (6), (7), (8), (9). В результате вычеркнуты все столбцы, то есть эти три импликанты покрывают все множество импликант данной функции. Этапы 4-6 не нужны. Следовательно, =() ∨ ()∨ ().

Для проверки построим таблицу истинности функции :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Она совпадает с исходной таблицей истинности.

Ответ: =() ∨ ()∨ ().

Рассмотренные методы минимизации БФ лежат в основе методов проектирования логический устройств компьютера.

1. Построим логическую схему устройства.

**Контрольные вопросы**

1. Составьте таблицу истинности функций отрицания и сложения по модулю 2
2. Составьте таблицу истинности функций Штрих Шеффера и Стрелка Пирса
3. Приоритет логических операций.
4. Какие отношения имеют место на множестве логических операций?
5. Сколько существует булевых функций от n переменных?
6. Дайте определение полной системе булевых функций.
7. Перечислите классы Поста.
8. Дайте определение двойственной функции. Приведите примеры.
9. Дайте определение самодвойственной функции. Приведите примеры.
10. Постройте полином Жегалкина для функции «стрелка Пирса».
11. Сформулируйте теорему Поста.
12. Что такое базис? Приведите примеры базисов.
13. Перечислите основные методы минимизации функций.
14. Расскажите о методе Квайна.
15. Расскажите о методе карт Карно.

**Дополнительная литература**

1. Мальцев, И. А. Дискретная математика / И. А. Мальцев. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 292 с. – URL: https://e.lanbook.com/book/265193
2. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов : учеб. пособие для вузов по направлению "Приклад. мат." / Р. Хаггарти ; пер. с англ. С. А. Кулешова и др.. - Изд. 2-е, испр.. - М. : Техносфера, 2012. - 399 с.